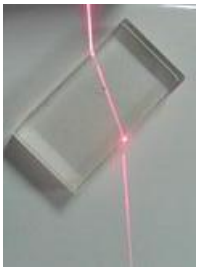
Ortzadar baten geometria eta kalkulu matematikoa

Denok dakigu ortzadarra zer den, eta denok geratu gara noizbait txundituta ortzadar eder bat ikustean. Benetan ederrak izaten baitira baldintza aproposak suertatzen direnean.

Bada, ortzadar batean dagoen geometria eta kalkulu matematikoak ez dira batere sinpleak, eta, historian zehar, hainbat zientzialari ospetsuk egin dute ahalegin handia ortzadarraren natura sakoneraino ezagutzeko.

X mendean, Alhazen (Ibn al Haitham), XIII mendean, Dietrich von Freiberg, XVII mendean, Antonius de Demini eta René Descartes, XVIII mendean, Isaac Newton eta XIX mendean Thomas Young, Richard Potter eta George Biddell Airy.



Hasteko, argiaren **errefrakzioa** ezagutu behar da, alegia, nola eta zenbat **desbideratzen** den argia ingurune batetik bestera pasatzen denean.
Errefrakzioaren legeak, edo **Snell-en legeak,** honela dio:

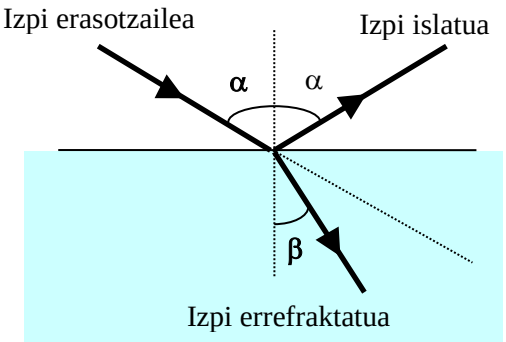
$$n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta$$

Ekuazio horretan agertzen diren aldagaiak: α eta β **angeluak:** izpi erasotzaileak eta izpi errefraktatuak osatzen dituzten angeluak dira (baina mugaren norabide perpendikularrarekiko, 1 irudiak erakusten duen bezala)

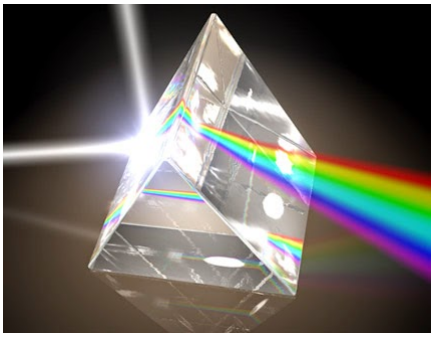
Ingurune baten **errefrakzio-indizea (n)**: argiaren abiadura "hutsean" (c) zati argiak "ingurune horretan" daukan abiadura (v):

$$n = \frac{c}{v}$$

Inguruneen errefrakzio-indizea beti da "1" zenbakia baino handiagoa, zeren argiaren abiadura hutsean, beti da handiena: $3 \cdot 10^8$ m/s.
Esate baterako, uraren errefrakzio indizea **1.33** inguru da, eta beira arruntarena **1.5** inguru.
Horrek esan nahi du argiak ura zeharkatzen duenean $v = 2.26 \cdot 10^8$ m/s duela, edota beira zeharkatzen duenean $v = 2 \cdot 10^8$ m/s

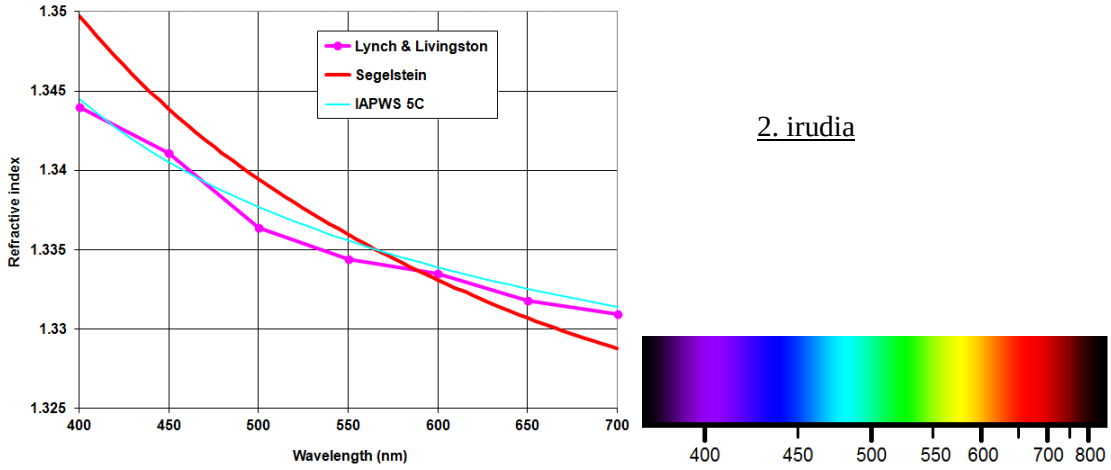


1 irudia



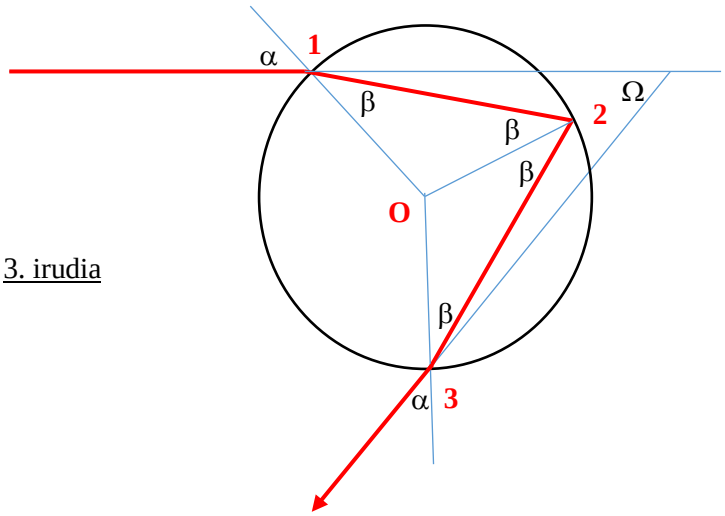
Errefrakzio-indize hori, ordea, ez da konstantea, eta argiaren uhin luzerarekin aldatu egiten da pixka bat. Hortaz, argiak muga bat topatzen badu airearen eta uraren artean (edo uraren ordez, beirazko prisma bat, edo diamante bat, edo plastiko garden bat), errefraktatzean, angelu pixka bat ezberdinarekin desbideratuko da argiaren koloreetako bakoitza, "n" errefrakzio-indizearen balioa, pixka bat ezberdina delako kolore bakoitzarentzat. Fenomeno hori nahikoa ezaguna da eta argiaren **dispertsio** deritzo.

Adibidez, uraren kasuan, 2 irudiaren ezkerraldeak erakusten du nola aldatzen den errefrakzio indizea (Refractive index) uhin luzerarekiko (Wavelength). Argiaren uhin luzera 400 nm-tik 700 nm-ra artekoa da (eskuinaldekoak erakusten du kolore bakoitzaren uhin-luzera):



2. irudia

Kontua da esferikoak izaten direla ur-tantak, eta horrelako geometria batean, argia errefraktatzean, angelua kalkulatzea ez da berehalakoa (ikusi 3 irudia). Har dezagun ezkerretik datorren argi izpi horizontal bat (gorria) eta demagun ur-tantaren gainazalean errefraktatu egiten dela (1 puntuan): α angelua osatzen du norabide perpendikularrarekiko (O tik datorren zuzen urdinarekiko).



3. irudia

Tantarekiko zenbat eta gorago jo argi izpiak, orduan eta α angelu handiagoa izango du, eta alderantziz; zenbat eta *zentratuago* jo argi izpiak, orduan eta α angelu txikiagoa izango du.

Bestetik, 3 irudian erakusten da errefraktatutako angelua, β, lau aldiz errepikatzen dela: lehena, 1 puntuan, errefrakzio-angelua, norabide normalarekiko; bigarrena, 2 puntuan, simetriagatik, hiruki *isoszelea* osatzen delako 1, 2 eta O puntuen artean (**O-1** eta **O-2** distantziak berdinak dira = tantaren erradioa); hirugarrena, 3 puntuan, berriz ere hiruki isoszelea **O-2-3**, eta, kasu honetan eraso-angelua da irteerako errefrakzioan. Beraz, irteerako angelua berriro izango da α, irudian ikusten den bezala, 3 puntuan.

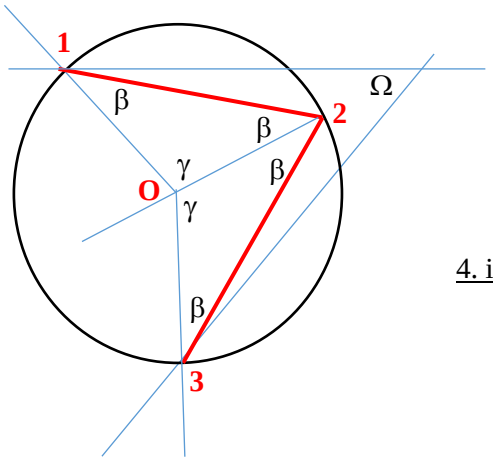
Orain kalkulatu behar dugun angelua **Ω** da, alegia, zenbat desbideratu den argia jatorrizko izpiarekiko, edo zein angelu osatzen duen amaierako izpiak hasierakoarekin.

Batetik, $\mathbf{n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta}$: $\mathbf{n_1}$ airearen errefrakzio-indizea (ia-ia hutsarena n_1=1). $\mathbf{n_2}$**:** uraren errefrakzio indizea: **1.33** gutxi gora behera (aurrerantzean, 2 azpiindizea kendu egingo diogu). Orduan:

$$\boldsymbol{\beta = arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right)} \qquad \textbf{(1 ek.)}$$

Bestetik, har ditzagun berriro hiruki isoszeleak (4 irudian, **O-1-2** eta **O-2-3**) eta dei diezaiogun γ hirugarren angeluari: edozein hirukiren hiru angeluen baturak 180º eman behar dituenez:

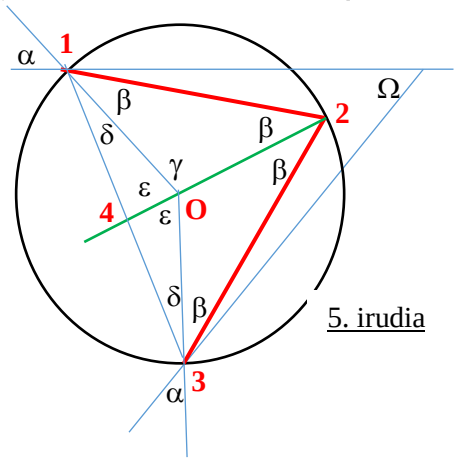
$$\gamma = 180^{o} - 2\beta$$



4. irudia

Ondoren, (5 irudian) **O** puntutik pasatzen den lerro *berdearen* alde banatan dauden bi angeluen baturak ere 180º eman behar du. Beraz,

$$\varepsilon + \gamma = 180^{o} \quad \text{eta hortik} \quad \varepsilon = 2\beta.$$



5. irudia

Bukatzeko, (berriro 5 irudian) 1 eta 3 erpinetako angeluak, **O-3** eta **4-3** norabideek osatzen dutena. **O-4-3** hirukiaren hiru angeluen baturak eginez, 180º eman behar du, baina 4 erpineko angelua 90º-koa da: Beraz,

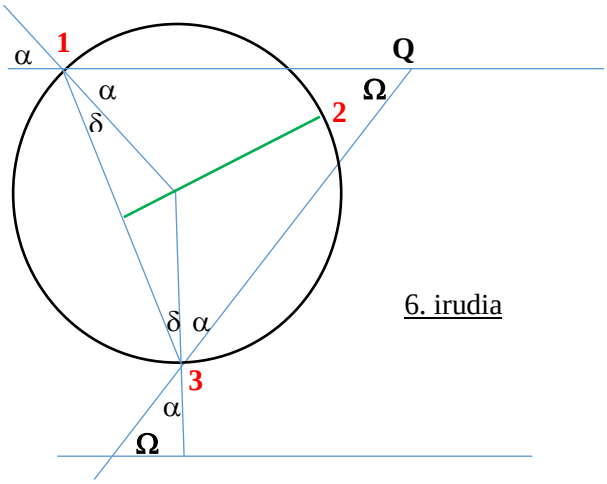
$$\varepsilon + \delta = 90^{o}$$

Eta hortik ateratzen da:

$$\delta = 90 - 2\beta$$

Eta azkenik, **1-Q-3** hiruki handia hartuta (ikusi 6 irudia), ondorioztatzen da: $\Omega + 2(\alpha+\delta) = 180^{o}$

Edo berridatziz: $\Omega + 2(\alpha + 90 - 2\beta) = 180 \Rightarrow \Omega + 2\alpha + 180 - 4\beta = 180 \Rightarrow \Omega = 4\beta - 2\alpha$



6. irudia

Hauxe da azken emaitza:

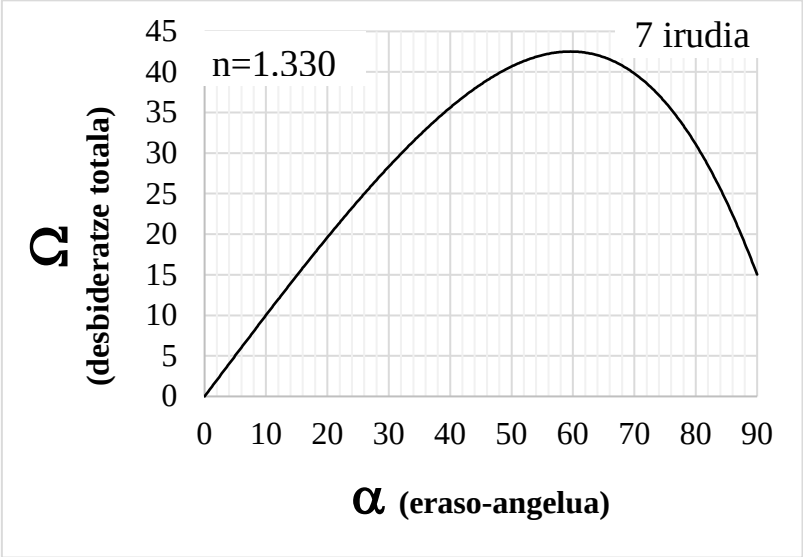
$$\Omega = 4\beta - 2\alpha$$

Baina β angelua α-ren menpe idatz daiteke (1 ek.) eta honela geratuko da:

$$\boxed{\Omega = 4 \cdot arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right) - 2\alpha \qquad \textbf{(2 ek.)}}$$

non α den zer angelu daukan argiaren norabideak tantan erasotzean, baina angelu horrek balio guztiak har ditzake 0 eta 90º artean, zentroaren paretik goiko ertzeraino.

Funtzio matematiko horrekin (2 ek.) grafiko bat egiten badugu, ikus dezakegu zenbat balio duen **Ω** angeluak **α** angelu posible guztietarako, eta hori 7 irudiak erakusten du ondoren:



Ikus daitekeenez, **α** angelu ezberdinetarako **Ω** angelu ezberdinak lortzen dira. Baina kurba horrek badauka *maximo* bat. Maximo hori kalkulatzeko <u>*deribatua*</u> kalkula daiteke:

$$\frac{d\Omega}{d\alpha} = 0$$

2 ekuazioan, Ω funtzioa deribatuz (arkosinua):

$$\frac{4 \cdot \frac{cos\alpha}{n}}{\sqrt{1 - \frac{sin^2\alpha}{n^2}}} - 2 = 0$$

Eta hortik bakanduz: $cos\alpha = \sqrt{\frac{n^2-1}{3}}$ edota $\boxed{\alpha_{max} = arcos\sqrt{\frac{n^2-1}{3}} \quad \textbf{(3 ek.)}}$

Ekuazio horretan erabiltzen bada **n=1.33** hauxe ateratzen da: **α_{max}=59.58º**

Eta 2. ekuazioan: $\Omega_{max} = 4 \cdot arcsin\left(\frac{\sin 59.58}{1.33}\right) - 2 \cdot 59,58 = 42,52°$

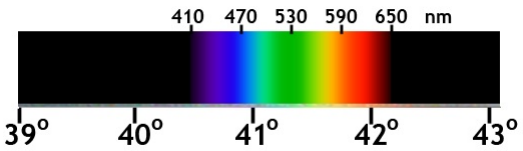
Zer esan nahi du *maximoaren* emaitza horrek? **α_{max}=59.58º** eta **Ω_{max}=42.52º**.

Batetik, ur-tantari erasotzen dioten argi izpi guztietatik (0-90º) ez da egongo bat ere Ω_{max}=42.52º baino gehiago desbideratzen denik (horregatik egoten da hain iluna ortzadarretik gora dagoen eskualdea).

Bestetik, 50<α<70 gradutako tartean erasotzen diotenek (α_{max}-etik gertu) orduan oso antzeko Ω desbideratze totala daukatela: Ω_{max}= **42.5º**, alegia, argi-izpi horiek guztiak, tantatik irteterakoan, gainezarri egiten direla norabide horretan.

Beste angeluetan erasotzen dioten izpiek, ordea, esate baterako 10<α<30 gradutako tartean, 10<Ω<30 gradutako desbideraketa daukate. Alegia, angelu bakoitzak desbideraketa ezberdina du, eta horiek ez dira gainezartzen. Horiek bakoitza bere aldetik irteten dira, baina beti, ortzadarraren azpitik, desbideratze-angeluak txikiagoak direlako.

Kalkulua egiteko hartu dugun n-ren balioa **n=1,330** izan da, baina balio hori kolore gorriarentzat da soilik (2. Irudia, 700 nm). Berdearentzat (λ=550 nm) n=1,335 edota urdinarentzat (λ=450 nm) n=1,340. Gorriak baino indize altuxeagoak dituzte beste koloreek, eta beraz, kalkuluak errepikatzen baditugu, **8 irudia eta taula** ateratzen dira:



8. irudia

n (2. Irudia)	α_{max} (2. ek)	Ω_{max} (1.ek)
1.330 gorria	59.58	42.52
1.335 berdea	59.29	41.79
1.340 urdina	59.00	41.07
1.345 morea	58.71	40.36

Eguzkiarekin eta euriarekin gertatu beharrean, fenomeno hauxe beha liteke, halaber, ur-jauzi batek sortutako ur-tantetan, edo iturri batean, ilargiaren argiarekin, edo beste zenbait argi iturrirekin, baina intentsitate apalagoak izaten dituzte. Berez, zirkulu osoa ikusi ahal beharko litzateke, baina euri-tantekin zaila izaten da zorua baino beheragoko angeluak behatzea; noizbait egongo bazinate hegazkin batean baina hodeien azpitik, ikus zenezakete ortzadar osoa, edo ortzadar zirkularra: hunkigarria.

Bigarren ortzadarra ere behatzen da, baina tantaren barruan beste eskema bat eraiki behar da: 1-sarrerako errefrakzioa, 2-lehen islapen bat, 3-bigarren islapen bat eta 4-irteerako errefrakzioa. Eta kalkuluak eginda (hurrengo artikuluren batean) 50° eta 54° artean ateratzen da, baina gorria azpian eta morea goian, eta argitasun txikiagoa dauka.

Laburpena:

- Eguzkiaren argia bizkarretik etorri behar zaigu, hau da, ortzadarra beti Eguzkiaren aurkako aldean ikusiko dugu.
- Norabide horrekin, Eguzkiarekin, ortzadarraren lehen zirkulua 42.52º eta 40,36º angeluen artean osatzen da (gorria goian eta morea azpian, ikusi ondorengo argazkia).
- Ikusle bakoitzaren ikuspegiak osatzen du ortzadarraren “konoa”, esandako angeluetan, beraz, bakoitzak ikusten dugu ortzadar ezberdina, edo “gure” ortzadar pertsonala. Eta, noski, ezin gara ortzadarra ukitzera iritsi, edota ortzadarraren azpitik gurutzatzera, efektu optiko bat baino ez delako.
- Bigarren ortzadarra 50° eta 54° artean ateratzen da, baina gorria azpian eta morea goian, eta argitasun txikiagoa dauka.
- Bi ortzadarren arteko eskualdeak argitasun gutxiago dauka (edo iluntasun handiagoa).